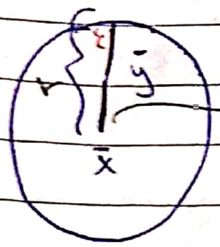
20/10/2020

Επόμενη ιδέα: Αφού "είμαι" στο y και έχω απόσταση $\|\bar{y}-\bar{x}\| < r$ από το κέντρο της μπάλας "λογικά" θα έχω "απόσταση" από το "σύνορο" που έχει τα σημεία $\bar{a}$ με $\|\bar{a}-\bar{x}\| = r$, όπου:

$\|\bar{y}-\bar{x}\| = r-\varepsilon < r$



$\Rightarrow$ μία ανοικτή μπάλα κέντρου $\bar{y}$ και ακτίνας $\varepsilon>0$ θα πρέπει λογικά να χωράει μέσα στο κέντρο

Άρα: Έστω $\bar{y} \in B(\bar{x}, r) \Leftrightarrow \|\bar{y}-\bar{x}\| < r$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \|\bar{y}-\bar{x}\| = r-\varepsilon$ τα έχω

Θ.ν.δ.ο $B(\bar{y},\varepsilon) \subset B(\bar{x}, r) \Leftrightarrow \forall \bar{z} \in B(\bar{y},\varepsilon): z \in B(\bar{x}, r)$

$\Leftrightarrow \|\bar{z}-\bar{y}\| < \varepsilon$ (το έχω) $\Leftrightarrow \|\bar{z}-\bar{x}\| < r$ (το θέλω)

$\Rightarrow$ Τριγωνική ανισότητα

$$\|\bar{z}-\bar{x}\| = \|\bar{z}-\bar{y}+\bar{y}-\bar{x}\| \le \underbrace{\|\bar{z}-\bar{y}\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\bar{y}-\bar{x}\|}_{=r-\varepsilon} < r$$

Πρόταση: Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $r>0$, δοσμένα σταθερά. Τότε η κλειστή μπάλα $\bar{B}(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| \le r\}$ είναι κλειστό σύνολο.

Αποδ: [ορισμός] Θ.ν.δ.ο το $\mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, r) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| < r\}$ είναι ανοικτό, δηλ. ότι $\forall \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{y}-\bar{x}\| > r$ $\exists \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$B(\bar{y},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{x}, r)$ ($\Leftarrow$) $\exists \varepsilon > 0$ $\|\bar{y}-\bar{x}\| = r+\varepsilon$

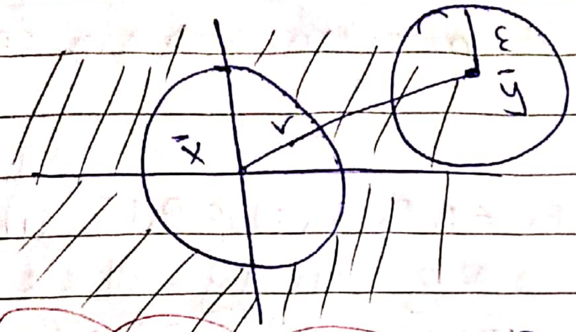
$\forall \bar{z} \in B(\bar{y},\varepsilon): \bar{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{x}, r)$

το έχω

$\Rightarrow \forall \bar{z}$ με $\|\bar{z} - \bar{y}\| < \varepsilon$ το έχω

$\|\bar{z} - \bar{x}\| > r$ το θέλω

$\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{x}, r)$



$\|\bar{y} - \bar{x}\| = r + \varepsilon$

$\|\bar{z} - \bar{y}\| < \varepsilon$

ΘνΔο $\Rightarrow \|\bar{z} - \bar{x}\| > r$

$\Rightarrow -\|\bar{z} - \bar{y}\| > -\varepsilon$

$\Rightarrow \|\bar{y} - \bar{x}\| - \|\bar{z} - \bar{y}\| > r$

Αν ισχύει: $\|\bar{z} - \bar{x}\| \geq \|\bar{y} - \bar{x}\| - \|\bar{z} - \bar{y}\|$, τότε τελειώσαμε

$\Leftrightarrow \|\bar{y} - \bar{x}\| \leq \|\bar{z} - \bar{x}\| + \|\bar{z} - \bar{y}\|$

$= \bar{y} - \bar{z} + \bar{z} - \bar{x} \leq \|\bar{y} - \bar{z}\| + \|\bar{z} - \bar{x}\|$

Δηλ. εδώ έχω αντίστροφη τριγωνική ανισότητα. Τώρα καταλαβαίνουμε την ανοικτή και κλειστή μπάλα.

Πρόταση: Έστω I μία (αυθαίρετη και υπεραριθμήσιμη) οικογένεια (σύνολο δεικτών $i \in I$ και $\{U_i, i \in I\}$ μία οικογένεια ανοικτών συνόλων $\Rightarrow U := \bigcup_{i \in I} U_i$ είναι ανοικτό

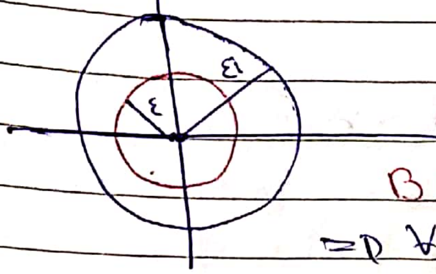
αποδ.

Έστω $\bar{x} \in U \Rightarrow \exists i \in I$, $\bar{x} \in U_i \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$: $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U_i \subset U$

Πρόταση: Έστω U_i, $i=1,\dots,n$, $n\in\mathbb{N}$ ανοιχτά. Τότε: $U=\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ είναι ανοιχτό. Πράγματι:

Έστω $\bar{x}\in U \Rightarrow \forall i=1,\dots,n: \bar{x}\in U_i \Rightarrow \forall i=1,\dots,n:$
$: \exists\, \varepsilon_i>0 : B(\bar{x},\varepsilon_i)\subset U_i$, U_i ανοιχτό $\Rightarrow$ για το
$\varepsilon:=\min\{\underbrace{\varepsilon_1}_{>0},\dots,\underbrace{\varepsilon_n}_{>0}\}>0.$

Έχουμε: $\forall i=1,\dots,n: \varepsilon\le\varepsilon_i \Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon)\subset B(\bar{x},\varepsilon_i)$
$\Rightarrow \forall \bar{y}$ με $\|\bar{y}-\bar{x}\|<\varepsilon$



$B(\bar{x},\varepsilon)\subset B(\bar{x},\varepsilon_i)$, ισχύει: $\|\bar{y}-\bar{x}\|<\varepsilon_i$
$\Rightarrow \forall i=1,\dots,n: B(\bar{x},\varepsilon)\subset U_i$
$\Rightarrow \boxed{B(\bar{x},\varepsilon)\subset U}$ (*)

(*) $\forall i=1,\dots,n$
$\forall \bar{y}\in B(\bar{x},\varepsilon): \bar{y}\in U_i \Rightarrow y\in U \Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon)\subset U$

Προσοχή!!! Η τομή ενός άπειρου πλήθους ανοιχτών (συνόλων ή καλύτερα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$) δεν είναι απαραίτητα ανοιχτό (σύνολο ή καλύτερα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$)

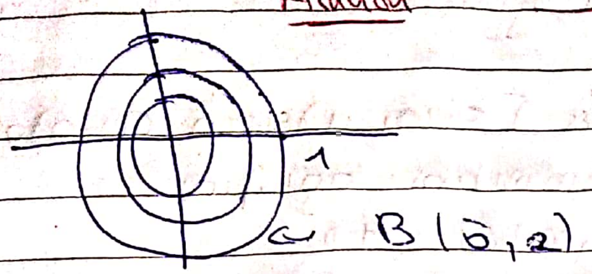
Αντιπαράδειγμα:
[$\{\bar{0}\}\in B(\bar{0},\frac{1}{\nu})\ \forall \nu\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{0}\in\bigcap_{\nu\in\mathbb{N}} B(\bar{0},\frac{1}{\nu}) \Rightarrow \bar{x}\notin\bigcap_{\nu=1}^{\infty} B(\bar{0},\frac{1}{\nu})$]

Προφανώς, το $U=\{\bar{0}\}$ δεν είναι ανοιχτό, αφού
$\nexists\, \varepsilon>0: B(\bar{0},\varepsilon)\subset\{\bar{0}\}$
[αφού π.χ. ένα $\bar{y}$, με $\|\bar{y}\|=\frac{\varepsilon}{2}>0$ είναι στοιχείο του $B(\bar{0},\varepsilon)$, αλλά προφανώς $\bar{y}\neq\bar{0}\Rightarrow\bar{y}\notin\{\bar{0}\}$].

Εναλλακτικά: $\boxed{\bigcap_{\nu=1}^{\infty} B(\bar{o}, 1+\frac{1}{\nu}) = \bar{B}(\bar{o},1)}$

Άσκηση



Άσκηση: $U=\{\bar{o}\}$ είναι κλειστό, πρέπει να ξεκινήσω με τον ορισμό

Άσκηση: νδο η τομή μιας (*) οικογένειας κλειστών = κλειστό

Να γίνει ως άσκηση η απόδειξη του παραπάνω

(*) (οποιασδήποτε) (ακόμα και υπεραριθμήσιμη)

Απόδειξη: [Άσκηση]

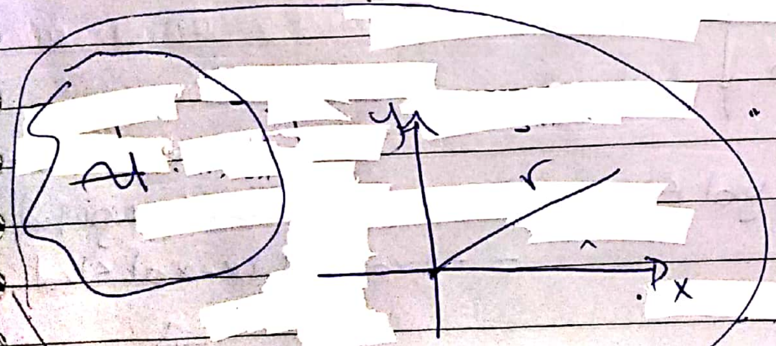
Προσοχή! Μία ένωση άπειρα πολλών κλειστών συνόλων δεν είναι απαραίτητα κλειστό σύνολο.

Αντιπαράδειγμα: $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu = [0,2)$ (στον $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^1$) → Δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό

Γενικά στον $\mathbb{R}^n$:

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \bar{B}(\bar{o}, 2-\frac{1}{\nu}) = B(\bar{o},2)$$ Άσκηση

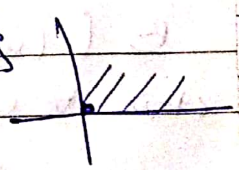
Ορισμός: Φραγμένο σύνολο = σύνολο που χωράει μέσα σε μία (όσο μεγάλη χρειάζεται) μπάλα (πεπερασμένης) ακτίνας $r>0$ [δηλ. $r \neq +\infty$]



Επίσημα: $U\subset\mathbb{R}^n$ φραγμένο $:\Longleftrightarrow \exists\, r>0 : U \subset B(\bar{o}, r)$

Αντιπαράδειγμα: $\mathbb{R}^n$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0\}$



Ορισμός: (Στον $\mathbb{R}^n$) Ένα σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται συμπαγές $:\Leftrightarrow$ κλειστό και φραγμένο

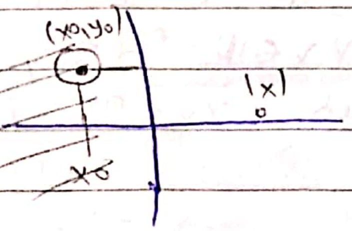
Π.χ. $\bar{B}(\bar{0}, r)$ είναι συμπαγές [είναι κλειστό σύνολο και είναι φραγμένο [επίσημος ορισμός:
$: \forall \varepsilon > 0 \cdot \bar{B}(\bar{0}, r) \subset B(\bar{0}, r+\varepsilon) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in \bar{B}(\bar{0}, r) : \bar{x} \in B(\bar{0}, r+\varepsilon) \Leftrightarrow \|\bar{x}\| < r+\varepsilon]$
$\Leftrightarrow \|\bar{x}\| \leq r$

Παράδειγμα: (Σύνολο που είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο)

$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ (= δεξί κλειστό ημιεπίπεδο)
[Δεν είναι φραγμένο: $\forall r > 0, \exists (x,y) \in U$:
$\|(x,y)\| \geq r$
$\Leftrightarrow (x,y) \notin B((0,0), r)$
Π.χ. το $(x,y) = (0, 2r)$

[Αλλά όσο μεγάλη ακτίνα r και να πάρουμε, δεν χωράει το U μέσα στην (ανοικτή) μπάλα κέντρου $\bar{0}$ και ακτίνας r]

Το $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ είναι κλειστό αφού το $\mathbb{R}^2 \setminus U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} =: V$
(ορισμός)
είναι ανοικτό



Πράγματι: Έστω $(x_0, y_0) \in V \Leftrightarrow x_0 < 0$. Τότε (ισχυρισμός).
$= -|x_0|$, $: |x - x_0| < |x_0|$

$B((x_0,y_0), |x_0|) \subset V$ $\Uparrow$
$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in B((x_0,y_0), |x_0|) : x < 0$
$\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < x_0^2 \Rightarrow (x-x_0)^2 < x_0^2$

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < x_0^2 \Rightarrow (x-x_0)^2 < x_0^2$

$\Rightarrow |x-x_0| < |x_0|$

$\Leftrightarrow x_0 - |x_0| < \boxed{x <} x_0 + |x_0| = -|x_0| + |x_0| = \boxed{0}$

$x^2 - 2xx_0 + x_0^2$

$\underbrace{x^2 + (y-y_0)^2}_{\geq 0} < 2xx_0 \Rightarrow 2x\underbrace{x_0}_{<0} > 0$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ $\Rightarrow x<0$

Παρατήρηση: Το κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ $\emptyset$ και όλο το $\mathbb{R}^n$ θεωρούνται (είναι) τα μοναδικά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι και ανοικτά και κλειστά

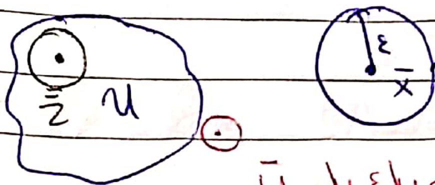
Παράδειγμα: (Σύνολο που είναι φραγμένο αλλά όχι κλειστό: π.χ. $\forall r>0$ $B(\bar{0},r)$ $[\subset B(\bar{0},r)]$
$\Rightarrow$ φραγμένο, αλλά ως μη κενό, $\neq \mathbb{R}^n$ - ανοικτό
$\Rightarrow$ δεν είναι κλειστό

Παρατήρηση: Το ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ ΕΝΟΣ $U \subset \mathbb{R}^n$ (δηλ. τα $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία $\exists \varepsilon > 0$: $B(\bar{x},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$) ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ ΤΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΤΟΥ U: π.χ. $B(\bar{0},r)$ έχει εξωτερικό το $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{0},r)$ ενώ το συμπλήρωμα είναι το $\mathbb{R}^n \setminus B(\bar{0},r)$

Ορισμός: Έστω $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ ένα (οποιοδήποτε) σύνολο. Τότε η κλειστή του θήκη, $\bar{\mathcal{U}}$, είναι η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ τα οποία περιέχουν το $\mathcal{U}$.

$\Rightarrow$ η κλειστή θήκη είναι κλειστό σύνολο

Ορισμός: $\bar{x} \in \mathcal{U}$ μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{U}$



— $B(\bar{x},\varepsilon)$ με $B(\bar{x},\varepsilon) \cap \mathcal{U} = \{\bar{x}\}$

$\bar{y}$ μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{U}$

$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cup \{\bar{x}\}$ και αυτό ισχύει $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon)$, και κατ' επέκταση $\forall \varepsilon'' > 0$

Ενώ το $\bar{z}$ π.χ. αν είναι εσωτερικό σημείο του $\mathcal{U}$, δηλ. $\exists \varepsilon > 0$: $B(\bar{z},\varepsilon) \subset \mathcal{U}$ $\Rightarrow B(\bar{z},\varepsilon) \cap \mathcal{U} = B(\bar{z},\varepsilon) \neq \{\bar{z}\}$

άρα για το $\bar{z}$ έχουμε $\forall \varepsilon > 0$: $B(\bar{z},\varepsilon) \cap \mathcal{U} \neq \{\bar{z}\}$

$\Rightarrow$ το $\bar{z}$ δεν είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{U}$

Πόρισμα: $\bar{z}$ εσωτερικό σημείο του $\mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $\bar{z}$ όχι μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{U}$

$\not\Leftarrow$?

(Άσκηση)

[Λύση: Δεν ισχύει, το $\bar{z}$ μπορεί π.χ. να είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{U}$, τέτοιο ώστε να βρίσκεται στο σύνορο του $\mathcal{U}$]

Παραδείγματα σχέσης εξωτερικού και συμπληρώματος

Έστω $U = \bar{B}(\bar{0},1) \Rightarrow U^c = \mathbb{R}^n \setminus U = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(\bar{0},1)$
και $ext\, U = U^c$ [ΑΣΚΗΣΗ]

Έστω $V = B(\bar{0},1) \Rightarrow V^c = \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{0},1)$ και
$ext\, V = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(0,1) \underset{\neq}{\subset} V^c$ κλειστό

Πάντα όμως: $ext\, W \subset W^c$